

Correction du devoir Maison n°1
Calcul différentiel et séries de fonctions

Solution de l'exercice 1. L'espace vectoriel de départ E étant de dimension finie et la fonction f étant linéaire, on sait que alors que f est continue (il n'y a pas d'histoire de complétude ici). On montre à la main que f est différentiable. Il n'y a aucune difficulté mais attention à la rédaction !

Pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$, on a, par la linéarité de f ,

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = f(h) + 0 \|h\|.$$

N'écrivez pas $D_x f(h) = f(h)$ est une application linéaire (continue) donc f différentiable. Il est incorrect de parler de $D_x f$ avant même d'avoir montré que f était bien différentiable. On dit que d'une part l'application $h \mapsto f(h)$ est une application linéaire, d'autre part l'application $\epsilon : h \mapsto 0$ tend clairement vers 0 quand $\|h\| \rightarrow 0$. On en conclut que f est différentiable sur E et même sa différentielle vaut, pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$,

$$D_x f(h) = f(h).$$

De plus l'application différentielle,

$$Df : E \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x \mapsto f,$$

est constante ! Elle est donc continue et f est \mathcal{C}^1 . On continue puisque Df est constante, l'application différentielle première est différentiable à son tour et sa différentielle est nulle. Pour tout $x \in E$ et $h \in E$,

$$D_{x+h} f - D_x f = f - f = 0 = 0 + \|h\| 0.$$

D'une part, $h \mapsto 0$ est linéaire, d'autre part $h \mapsto 0$ tend vers 0 quand $\|h\| \rightarrow 0$. Donc $D.f$ est différentiable et sa différentielle est nulle. Ainsi $D_x^2 f = \tilde{0}$ et ce pour tout $x \in E$. Puis par récurrence, on vérifie que pour tout $k \geq 2$,

$$D^k f = \tilde{0}.$$

Solution de l'exercice 2.

1. Là encore on montre à la main que u est différentiable. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x+h) = \|x-a+h\|_2^2 = \|x-a\|_2^2 + 2\langle x-a, h \rangle + \|h\|_2^2 = u(x) + L_x \cdot h + \|h\|_2 \epsilon(h),$$

avec $L_x(h) = 2\langle x-a, h \rangle$ qui est linéaire par propriété du produit scalaire, $\epsilon(h) = \|h\|_2$ qui tend vers 0 quand $\|h\|_2 \rightarrow 0$. Attention, c'est $\epsilon(h)$ tout seul qui doit tendre vers 0 et non $\|h\| \epsilon(h)$. On en déduit donc que l'application u est différentiable sur \mathbb{R}^n et

$$D_x u(h) = 2\langle x-a, h \rangle.$$

2. La méthode à la main est bien trop brutale ici. Il faut construire f pas à pas. Posons

$$i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Bien entendu, l'on sait que i est différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou dérivable puisque i est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $h \in \mathbb{R}$,

$$D_x i(h) = h i'(x) = -\frac{h}{x^2}.$$

Maintenant on en déduit que $i \circ u$ est différentiable sur l'ensemble des vecteurs x tel que $u(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on sait que

$$D_x(i \circ u)(h) = D_{u(x)}i(D_x u(h)) = -\frac{D_x u(h)}{u^2(x)} = \frac{-2\langle x-a, h \rangle}{\|x-a\|_2^4}.$$

On termine avec

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto a - x, \end{aligned}$$

qui est différentiable sur \mathbb{R}^n puisque affine et de différentielle

$$D_x v(h) = -h.$$

Pour ceux qui n'en sont pas sûrs, détailler la preuve, qui se fait à la main : $v(x+h) - v(x) = \dots$. A l'aide de tous ces outils, on dit que f vaut $f = v \times (i \circ u)$. Ici ce n'est pas une composition entre $i \circ u$ et v mais bien un produit d'une forme $i \circ u$ (qui atterrit donc dans les scalaires \mathbb{R}) et une fonction vectorielle v qui atterrit dans \mathbb{R}^n . On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x f(h) = D_x v(h) \times i \circ u(x) + v(x) \times D_x(i \circ u)(h).$$

Ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} D_x f(h) &= -\frac{h}{\|x-a\|_2^2} + (a-x) \frac{-2\langle x-a, h \rangle}{\|x-a\|_2^4} = \frac{2\langle x-a, h \rangle(x-a)}{\|x-a\|_2^4} - \frac{h}{\|x-a\|_2^2} \\ &= \frac{2\langle x-a, h \rangle(x-a) - h\|x-a\|_2^2}{\|x-a\|_2^4}. \end{aligned}$$

3. Avec un joli dessin à l'appui, on sait que le projeté d'un vecteur sur une droite de vecteur directeur $x-a$ est

$$p(h) = \frac{\langle x-a, h \rangle(x-a)}{\|x-a\|_2^2}.$$

De plus le projeté sur l'orthogonal de $\text{Vect}(x-a)$ vaut

$$q(h) = h - p(h).$$

Dont on déduit que le symétrique par rapport à l'axe $x-a$ (toujours avec un joli dessin) est

$$S(h) = p(h) - q(h) = 2p(h) - h = 2 \frac{\langle x-a, h \rangle(x-a)}{\|x-a\|_2^2} - h = \frac{2\langle x-a, h \rangle(x-a) - h\|x-a\|_2^2}{\|x-a\|_2^2}.$$

Et à l'étonnement général, on trouve que

$$Df(x).h = \frac{S.h}{\|x-a\|_2^2}.$$

Solution de l'exercice 3.

1. Soient x et y deux réels entre a et b . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)\| \\ &\leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\|. \end{aligned}$$

Or f_n est k -lipschitzienne donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k|x - y| + \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(y) - f(y)\|.$$

La constante k étant indépendante de n , lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient grâce à la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f ,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k|x - y|.$$

Ce qui montre bien que f est lipschitzienne. A tous ceux à qui j'ai demandé si $\lim \|\cdot\| = \|\lim \cdot\|$ la réponse est oui puisque la norme est toujours une application continue : $\| \|x_n\| - \|x\| \| \leq \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Supposons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f . Alors la négation nous donne (attention il faut savoir nier une affirmation même un peu longue)

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \text{ tel que } \sup_{x \in [a, b]} \|f_n(x) - f(x)\| > \epsilon. \quad (1)$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n = \varphi(N) \geq N$ et $x_{\varphi(N)} \in [a, b]$ tel que,

$$|f_{\varphi(N)}(x_{\varphi(N)}) - f(x_{\varphi(N)})| > \epsilon. \quad (2)$$

En fait il est possible de construire φ strictement croissante, car le maximum entre $N + 1$ et $\varphi(N)$ est un entier donc par (1) il existe $\varphi(N + 1) \geq \max(N + 1, \varphi(N))$ tel que $|f_{\varphi(N+1)}(x_{\varphi(N+1)}) - f(x_{\varphi(N+1)})| > \epsilon$. On a ainsi construit une sous-suite $(x_{\varphi(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ sur laquelle les $f_{\varphi(N)}$ restent loin de f . Or la suite de fonctions converge simplement c'est-à-dire lorsque l'argument x ne bouge pas, $f_n(x) - f(x)$ tend vers 0. Le but du jeu est donc de *stabiliser* la suite $(x_{\varphi(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ autour d'un x fixe. Par exemple si la suite convergeait une limite x ce serait plutôt chouette... Mais rappelons que cette suite réelle se trouve dans un intervalle borné. Vous y êtes? On invoque le théorème de Bolzano-Weierstrass naturellement! Il existe une autre extractrice $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que la nouvelle suite $(x_{\psi(\varphi(N))})_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $x \in [a, b]$. Voyons ce que l'on obtient pour ce x . Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_{\psi(\varphi(N))}(x) - f(x)| &\geq |f_{\psi(\varphi(N))}(x_{\psi(\varphi(N))}) - f(x_{\psi(\varphi(N))})| \\ &\quad - |f_{\psi(\varphi(N))}(x) - f_{\psi(\varphi(N))}(x_{\psi(\varphi(N))})| \\ &\quad - |f(x_{\psi(\varphi(N))}) - f(x)|. \end{aligned}$$

Pour la première ligne on utilise (2). Pour les deux autres lignes on utilise que ces fonctions sont k -lipschitziennes (d'après la question 1 pour la fonction f),

$$|f_{\psi(\varphi(N))}(x) - f(x)| \geq \epsilon - 2k|x - x_{\psi(\varphi(N))}|.$$

Maintenant par la convergence simple $|f_{\psi(\varphi(N))}(x) - f(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, par définition de x et comme k est indépendant de N , $2k|(x) - x_{\psi(\varphi(N))}| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$,

$$0 > \epsilon.$$

Ce qui est absurde. Donc l'hypothèse de non-convergence uniforme est mise fautive et finalement la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .